令和4年度入学試験問題（後期日程）

数　学

出　題　意　図

問題1　問題文の内容を正しく理解できる能力と数列の和の計算力をみる。

問題2　空間ベクトルと内積計算に関する習熟度と関数の最大値を求める知識の定着度を確認する。

問題3　円と直線の位置関係についての理解度と回転体の体積の計算能力をみる。

問題4　不等式の証明の習熟度やはさみうちの原理の理解度を確認する。

後期日程

令和４年度入学試験問題

数　　学

注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験者は $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ の４問全ての問題を解答すること。
3. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので，解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また，解答用紙は問題ごとに別になっているので，注意すること。
4. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
5. この問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ kは正の整数とし，直線 $y=k$ を ℓ とする。ℓ と y 軸の交点を A_k，ℓ と放物線 $y=x^2$ の $x \geqq 0$ の部分との交点を B_k とする。このとき，点 B_k との距離が最小となる ℓ 上の格子点がただ1つ定まるので，この格子点を P_k とする。ただし，格子点とは x 座標と y 座標がともに整数の点である。

線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{P}_k$ (両端を含む) 上の格子点の個数を $N(k)$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $N(10)$ を求めよ。

(2) $N(k)=5$ を満たす最大の k を求めよ。

(3) 正の整数 n に対して，$N(k)=n+1$ を満たす k の個数を求めよ。

(4) 正の整数 m に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m^2} N(k)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1$，$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA} = 2 : \sqrt{3} : 1$ が成り立つとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を t とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を t を用いて表せ。

(2) $\vec{b} \cdot \vec{c}$，$\vec{c} \cdot \vec{a}$ を t を用いて表せ。

(3) 四面体OABCの体積 V を t を用いて表せ。

(4) (3) で求めた V の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面において，点 $(4, 0)$ を中心とする半径 2 の円を C とする。また，m は正の実数として，直線 $y = mx$ を ℓ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ℓ が C と共有点をもたないとき，m のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) (1) のとき，円 C を直線 ℓ のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) すべての実数 x, y に対して,

$$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(y+\frac{3\pi}{4}\right)\right| \leqq |x-y|$$

が成り立つことを示せ。

(2) 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=0, \quad a_{n+1}=\frac{\pi}{4}\sin\left(a_n+\frac{\pi}{4}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$