令和４年度入試　数学出題意図（前期）

1. 微分積分の基礎的計算力および応用力をみる。
2. 放物線の性質，関数の増減についての理解と応用力をみる。
3. 絶対値に関する場合分け，区間上での 2 次関数の最大・最小に関する理解をみる。
4. 整数の除法，数列の和に関する理解をみる。
5. 積分の性質の理解および計算力をみる。

理学部数学科　　前期日程

令和４年度入学試験問題

数　学

注意事項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので，解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また，解答用紙は問題ごとに別になっているので，注意すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の５問すべてを解答すること。
5. この問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$$

を求めよ。

(2) n を自然数とする。$x \geqq 0$ に対し，不等式

$$\log(1+x) \geqq \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

を示せ。

$\boxed{2}$ a を正の実数とする。2 つの放物線

$$C_1 \ : \ y = x^2$$
$$C_2 \ : \ x = y^2 + \frac{1}{4}a$$

を考える。直線 ℓ が C_1 にも C_2 にも接するとき，直線 ℓ は C_1 と C_2 の共通接線であるという。ただし，接点は異なっていてもよい。

(1) 実数 s，t に対し，直線 $\ell : y = tx + s$ が C_1 と C_2 の共通接線であるとき，a を t のみを用いて表せ。

(2) 2 つの放物線 C_1 と C_2 が，相異なる 3 本の共通接線を持つとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ aを実数とする。関数 $f(x) = x\,|\,x-1\,|$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ n を自然数とし，x に関する整式 $P(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ を考える。ただしここで，$x^0=1$ と定める。

(1) $P(1)$ と $P(2)$ を求めよ。

(2) $P(x)$ を x^2-3x+2 で割った余りを求めよ。

$\boxed{5}$ 区間 $[1,\infty)$ で定義された次の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を考える。

$$g(x)=\int_1^x e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy,\quad f(x)=g(x)+\int_1^x y^{-2}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

(1) 極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ。

(2) 区間 $[1,\infty)$ で $f(x)\leqq 2g(x)$ となることを示せ。

(3) 次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\leqq \lim_{x\to\infty} g(x)\leqq e^{-\frac{1}{2}}$$

ただし，極限値 $\lim_{x\to\infty} g(x)$ は存在するとしてよい。