# 令和 5 年度入試　数学出題意図（後期）

1. 確率に関する理解力と組合に関する計算力をみる。
2. いくつかのベクトルの間に課された条件を正確に扱い，数式化し処理する計算力をみるとともに，微分により関数の増減を扱う応用力をみる。
3. 面積の積分による表示と微分による最小値の導出に関する理解力をみる。
4. 漸近線に注意してグラフの概形を描く力と，関数の最大最小の条件とグラフから定義域の性質を読み解く応用力をみる。

理学部　後期日程

# 令和5年度入学試験問題

# 数　学

## 注意事項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので，解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また，解答用紙は問題ごとに別になっているので，注意すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の4問すべてを解答すること。
5. この問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ $n$を自然数とする。数直線上で原点を出発点として点Pを動かす。1個のさいころを投げて出た目が1, 2, 3, 4ならば正の向きに1だけ進め，出た目が5, 6ならば負の向きに1だけ進める。この試行を$2n$回繰り返すとき，点Pの座標が$x$である確率を$p(x)$と表す。次の問いに答えよ。

(1) $p(2n-2)$を求めよ。

(2) $k$は$-n \leqq k \leqq n-1$を満たす整数とする。このとき，$\dfrac{p(2k+2)}{p(2k)} \leqq 1$となる$k$の条件を求めよ。

(3) $m$を自然数とし，$n=3m+1$とする。$-n \leqq k \leqq n$の範囲で，$p(2k)$が最大となる整数$k$をすべて求め，$m$を用いて表せ。

$\boxed{2}$ 平面上の 3 点 O, A, B は同一直線上にはないとする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，$\alpha = |\vec{a}|$, $\beta = |\vec{b}|$ とおく。また，線分 AB を $\alpha : \beta$ に内分する点を C とし，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\gamma = |\vec{c}|$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{c} = p$ かつ $\vec{b} \cdot \vec{c} = q$ であるとき，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を $p$ と $q$ を用いて表せ。

(2) $\alpha + \beta = \alpha\beta$ かつ $\vec{a} \cdot \vec{c} = \gamma^2$ であるとき，$\alpha$ を求めよ。

(3) 点 A, B が $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{-(\alpha\beta)^2}{\alpha + \beta}$ を満たしながら動くとき，$\gamma^2$ の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$ $p > 0$ とする。放物線 $C_1 : y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(-2, 4)$，$\mathrm{Q}(2p, 4p^2)$ と原点 O を頂点とする三角形の面積を $T(p)$ とする。また，点 Q で直線 QP に接する放物線 $C_2 : y = -x^2 + bx + c$ と放物線 $C_1$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とする。$p > 0$ の範囲で，$\dfrac{S(p)}{T(p)}$ の最小値とそのときの $p$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい。

(2) 次の条件を満たす実数 $a$ をすべて求めよ。

$x \leqq a$ の範囲で，$f(x)$ の最大値は $\dfrac{1}{4}$ である。

(3) 次の条件を満たす実数 $b$ をすべて求めよ。

$b \leqq x \leqq b+\dfrac{3}{2}$ の範囲で，$f(x)$ の最大値は $-\dfrac{4}{9}$，最小値は $-\dfrac{4}{5}$ である。