令和５年度入試　数学出題意図（前期）

1. 微分を利用して関数のグラフの概形を書き，関数の増減をもとにして等式を考察する応用力をみる。
2. ベクトルの内積および座標表示による変形により，与式から条件を正確に導く応用力をみる。
3. 群数列に課された条件を正確に扱い，数式化し処理する応用力をみる。
4. 三角形の個数を決める条件を正確に考察できる理解力および，区分求積法による計算力をみる。
5. 微分および積分に関する計算力および理解力をみる。

理学部数学科　　前期日程

令和５年度入学試験問題

数　　学

注意事項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。

2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので，解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また，解答用紙は問題ごとに別になっているので，注意すること。

3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。

4. $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ の５問すべてを解答すること。

5. この問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

の増減と $y = f(x)$ のグラフの凹凸を調べ，グラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ は用いてよい。

(2) 次を満たす自然数の組 (m, n) をすべて求めよ。

$$m^n = n^m \quad \text{かつ} \quad m < n$$

$\boxed{2}$ a を実数とする。O を原点とする xy 平面上の点 P と点 Q に対して，条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| + \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + a = 0 \qquad (*)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標が $(0,\ -1)$ で $a = -2$ のとき，点 P が条件 $(*)$ を満たしながら動いてできる図形を xy 平面に図示せよ。

(2) $a > 0$ とする。点 P と点 Q が条件 $(*)$ を満たして動くとき，点 Q の動く範囲を xy 平面に図示せよ。

3 群に分けられた数列

$$a_1 \mid a_2 \ a_3 \mid a_4 \ a_5 \ a_6 \mid \cdots\cdots$$

は，次の条件 (i)，(ii)，(iii) を満たしているとする。

(i) 第 1 群は a_1 のみからなる。また n を 2 以上の自然数とするとき，第 n 群は項数が n であるような等差数列であり，その公差は n によらない定数 d である。

(ii) 自然数 n に対し，第 n 群の最後の項を b_n とし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ とおくとき，

$$S_n = \frac{d+1}{2}n^2 + \frac{1-d}{2}n$$

が成り立つ。

(iii) 自然数 n に対し，第 n 群に含まれる項の和を T_n とおくとき，

$$T_n = 4n^2 - 3n$$

が成り立つ。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 定数 d の値を求めよ。

(2) k を自然数とする。次の条件を満たすような m をすべて求めよ。

第 m 群は $7k-6$ を含む。

4 次の問いに答えよ。

(1) L を 2 以上の自然数とする。各辺の長さが自然数で，3 辺の長さの和が $4L$ である二等辺三角形の個数 $N(L)$ を求めよ。ただし，合同な三角形は同じとみなし，重複して数えない。

(2) (1) のような $N(L)$ 個の二等辺三角形の面積の平均値を $S(L)$ とする。このとき，極限

$$\lim_{L\to\infty} \frac{S(L)}{L^2}$$

を求めよ。

$\boxed{5}$ 実数 θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。2 つの関数 $x(t)$ と $y(t)$ を次で定義する。

$$x(t) = \cos(\theta + (\pi - 2\theta)t),\quad y(t) = \sin(\theta + (\pi - 2\theta)t)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 次の定積分の値を θ を用いて表せ。

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}}{y(t)}\,dt$$

(2) (1) の定積分の値を $f(\theta)$ とおくとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$f(\theta) \leqq \frac{2}{\tan\theta} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$