出題意図

(数学)

$\boxed{1}$ ベクトル空間の基底や次元に関する計算能力をみる.

$\boxed{2}$ 正則行列，固有値，対角化可能性，1次独立性について理解度をみる.

$\boxed{3}$ 重積分に関する計算能力をみる.

$\boxed{4}$ 級数および多変数関数の微分の取り扱いについて理解度をみる.

(英語)

$\boxed{1}$ 数学に関連する英語の能力をみる.

2024 年度
信州大学理学部数学科
第 3 年次編入学

学力試験 試験問題

2023 年 6 月 2 日 (金)

試験時間: 英語, 数学 10:00～12:30

- 開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。
- 計算用紙は配布しないので、問題冊子の余白などを利用すること。
- 数学 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ と英語 $\boxed{1}$、すべてに解答すること。
- 解答は指定された解答用紙に書くこと。
- 解答用紙すべてに受験番号を書くこと。

数学

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

とする。また、W を

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) V の次元および一組の基底を求めよ。

(2) (1) で求めた V の基底を含む $\mathbb{R}^4$ の基底を一組求めよ。

(3) 和空間 $V + W$ の次元および一組の基底を求めよ。

(4) 共通部分 $V \cap W$ の次元および一組の基底を求めよ。

—以下余白—

$\boxed{2}$ n 次複素正方行列 A が、ある自然数 $m \geq 2$ に対して、$A^{m-1} \neq O$ かつ $A^m = O$ を満たすとする。ただし、O は n 次零行列とする。次の問いに答えよ。

(1) A は正則行列でないことを示せ。

(2) A の固有値はすべて 0 であることを示せ。

(3) A は対角化できないことを示せ。

(4) 任意の複素数 $s \in \mathbb{C}$ に対して、$I - sA$ は正則行列であることを示せ。ただし、I は n 次単位行列とする。

(5) $A^{m-1}\boldsymbol{v}$ が零ベクトルにならないような $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ をとる。このとき

$$\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v},\ A^2\boldsymbol{v},\ \cdots,\ A^{m-1}\boldsymbol{v}$$

は 1 次独立であることを示せ。

—以下余白—

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 次の重積分を求めよ。

$$\iiint_D 4(x^2+y^2-z^2)\,dxdydz, \quad D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leq z, z\leq 1\}.$$

(2) 曲面 $z=3-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ の円柱面 $x^2+y^2=4$ の内部にある部分の面積を求めよ。

—以下余白—

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $p > 1$ とし、正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するとする。このとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ は収束することを示せ。

(2) 関数 $f(x, y) = \cos(xy) + (x+1)^2 + y - 2$ とする。このとき、$x = 0$ の近くで、$f(x, y(x)) = 0$ を満たす陰関数 $y = y(x)$ がただ一つ存在することを示せ。また、曲線 $f(x, y) = 0$ の点 $(0, 0)$ での接線を求めよ。

(3) 次の関数 $g(x, y)$ の点 $(0, 0)$ における方向微分係数 $g_\theta(0, 0), \theta \in [0, 2\pi)$ を求めよ。また、$g(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で全微分可能であるかどうかを調べよ。

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ただし,

$$g_\theta(x, y) = \lim_{r \to +0} \frac{g(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta) - g(x, y)}{r}$$

である。

—以下余白—

英語

英語問題は理学部入試事務室窓口で閲覧できます。